Solution de la Série $\mathrm{N}^o 4$: Matrices, déterminant, inverse d'une matrice et sytèmes

Exercice 1

1. Montrer que tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme
$$z = x + y(1 + \mathrm{i}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
2. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des matrices de la forme
$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ qui à tout $z = x+y(1+\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ associe $\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ est une bijection.
3. (a) Montrer que, pour tout $(z', z'') \in \mathbb{C}^2$, on a :
$$\begin{aligned} \Phi(z' + z'') &= \Phi(z') + \Phi(z''), \\ \Phi(z'z'') &= \Phi(z')\Phi(z''). \end{aligned}$$
   (b) En déduire que $(\mathcal{K}, +, \times)$ est un corps commutatif.
   (c) Calcucler explicitement M^{-1} pour
$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Solution :

1. Montrons que tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme
$$z = x + y(1 + \mathrm{i}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
en effet, pour cela il suffit de montrer que le système $\{1; 1+\mathrm{i}\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit α et β deux scalaires réels tels que $\alpha\, 1 + \beta\,(1 + \mathrm{i}) = 0$, montrons que $\alpha = \beta = 0$?
On a $\alpha\, 1 + \beta\,(1 + \mathrm{i}) = (\alpha + \beta)\, 1 + \beta\, \mathrm{i} = 0$, alors
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta &=& 0 \\ \beta &=& 0 \end{array} \right.$$
puisque $\{1; \mathrm{i}\}$ est libre dans $\mathbb{C}$; donc $\alpha = \beta = 0$; donc $\{1; 1 + \mathrm{i}\}$ est un système libre.
Comme $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2 = \mathrm{Card}\{1; 1 + \mathrm{i}\}$, alors $\{1; 1 + \mathrm{i}\}$ est une base de $\mathbb{C}$.
Finalement, pour nombre complexe z il existe x et y deux réels uniques tels que z s'écrit sous la forme unique
$$z = x + y(1 + \mathrm{i}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
2. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des matrices de la forme
$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
$$\mathcal{K} = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(a) L'ensemble $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: en effet,

– L'ensemble $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: en effet,

*En prenant $x = y = 0$, on trouve que la matrice nulle $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{K}$; donc $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

*Soient $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -2y' & x'+2y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{K}$ et λ un scalaire réel ; alors

$$M+M' = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ -2y' & x'+2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ -2(y+y') & (x+x')+2(y+y') \end{pmatrix}$$

donc

$$M+M' = \begin{pmatrix} x'' & y'' \\ -2y'' & x''+2y'' \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$$

*On a aussi

$$\lambda\, M = \begin{pmatrix} \lambda\, x & \lambda\, y \\ -2(\lambda\, y) & (\lambda\, x)+2(\lambda\, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ -2\zeta & \xi+2\zeta \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$$

d'où $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

– $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $(\mathcal{K}, +, \times)$ est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{K}$, alors

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -2y & 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = x\, e_1 + y\, e_2$$

où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; donc le système $\{e_1; e_2\}$ engendre $\mathcal{K}$. le système $\{e_1; e_2\}$ est libre, en effet soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $x\, e_1 + y\, e_2 = O_2$, alors

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

donc le système $\{e_1; e_2\}$ est libre et engendre $\mathcal{K}$, d'où le système $\{e_1; e_2\}$ est une base de $\mathcal{K}$; ce qui montre que $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel de dimension 2 qui est la dimension de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$

(b) Montrons que l'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ qui à tout $z = x + y(1+\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ associe $\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ est une bijection. En effet,

– L'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ est injecive : en effet, soient $z = x+y(1+\mathrm{i})$ et $z' = x'+y'(1+\mathrm{i})$ dans $\mathbb{C}$ tels que $\Phi(z) = \Phi(z')$, montrons que $z = z'$? on a $\Phi(z) = \Phi(z')$, alors

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -2y' & x'+2y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x-x' & y-y' \\ -2y+2y' & x-x'+2y-2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $x = x'$ et $y = y'$; d'où $z = z'$; ce qui prouve que Φ est injective.

– L'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ est surjective : en effet, soient x et y deux réels, alors la martice

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$$

existe et elle est dans $\mathcal{K}$; donc l'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{K}$, $(x,y) \longmapsto \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ est surjective car à tout élément dans $M \in \mathcal{K}$ il existe au moins un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} = \Psi(x,y)$$

or l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = z = x + y(1+\mathrm{i})$ est une bijection, alors sa réciproque $f^{-1}(z) = (x,y)$ est aussi bijective ; donc

$$\Psi \circ f^{-1}(z) = \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} = \Phi(z)$$

Finalement, l'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ est bijective.

3. (a) Montrons que, pour tout $(z', z'') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(z' + z'') &= \Phi(z') + \Phi(z''), \\ \Phi(z'z'') &= \Phi(z')\Phi(z''). \end{aligned}$$

Soit $(z', z'') \in \mathbb{C}^2$, on a $z' = x' + y'(1+\mathrm{i})$ et $z'' = x'' + y''(1+\mathrm{i})$, alors

$z'+z'' = (x'+x'')x+(y'+y'')(1+\mathrm{i})$ et $z'z'' = (x'x''-2y'y'')+(x'y''+x''y'+2y'y'')(1+\mathrm{i})$

$$\Phi(z')+\Phi(z'') = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -2y' & x'+2y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' & y'' \\ -2y'' & x''+2y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+x'' & y'+y'' \\ -2(y'+y'') & (x'+x'')+2(y'+y'') \end{pmatrix}$$

et

$$\Phi(z'+z'') = \Phi((x'+x'')x + (y'+y'')(1+\mathrm{i})) = \begin{pmatrix} x'+x'' & y'+y'' \\ -2(y'+y'') & (x'+x'')+2(y'+y'') \end{pmatrix}$$

d'où $\Phi(z'+z'') = \Phi(z') + \Phi(z'')$, ceci d'une part et d'autre, par un produit matriciel, il vient

$$\begin{aligned} \Phi(z')\Phi(z'') &= \begin{pmatrix} x' & y' \\ -2y' & x'+2y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' & y'' \\ -2y'' & x''+2y'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'x''-2y'y'' & x'y''+x''y'+2y'y'' \\ -2(x'y''+x''y'+2y'y'') & x'x''+2x'y''+2x''y'+2y'y'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(z'.z'') &= \begin{pmatrix} x'x''-2y'y'' & x'y''+x''y'+2y'y'' \\ -2(x'y''+x''y'+2y'y'') & x'x''-2y'y''+2(x'y''+x''y'+2y'y'') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'x''-2y'y'' & x'y''+x''y'+2y'y'' \\ -2(x'y''+x''y'+2y'y'') & x'x''+2x'y''+2x''y'+2y'y'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où on obtient légalité $\Phi(z'z'') = \Phi(z')\Phi(z'')$.

(b) D'après la question 3.(a) on a montré que Φ est un homomorphisme d'anneau et comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps et $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ est bijective ; alors $(\mathcal{K}, +, \times)$ est un corps et Φ est un homomorphisme de corps.

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, calcucler explicitement M^{-1} pour

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$$

– le déterminant de la matrice M est $\det(M) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
– Soit $M' = M^T = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\Gamma$ où Γ est la matrice dont les coefficients sont

$$\Gamma_{11} = x + 2y, \quad \Gamma_{12} = -y, \quad \Gamma_{21} = 2y \quad \text{et} \quad \Gamma_{22} = x$$

d'où

$$M^{-1} = \frac{1}{(x+y)^2+y^2} \begin{pmatrix} x+2y & -y \\ 2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+2y}{(x+y)^2+y^2} & -\dfrac{y}{(x+y)^2+y^2} \\ \\ \dfrac{2y}{(x+y)^2+y^2} & \dfrac{x}{(x+y)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 2

On appelle matrice de rotation toute matrice associée à une rotation d'angle θ donnée par

$$G_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

1. Déterminer les matrices G_θ^m pour tout entier $m \geq 1$.
2. Montrer que pour toute $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice G_θ est inversible,

Solution : Considérons les matrices G_θ données par

$$G_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

1. Déterminons les matrices G_θ^m pour tout entier $m \geq 1$: en effet, on procède à une démonstration par récurrence
   - Pour $m = 1$, on a $G_\theta^1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = G_\theta$.
   - Pour $m = 2$, on a

   $$\begin{aligned} G_\theta^2 &= G_\theta \times G_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   d'où $G_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$
   - Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'étape $(n-1)$, c'est à dire

   $$G_\theta^{m-1} = \begin{pmatrix} \cos((m-1)\theta) & \sin((m-1)\theta) \\ -\sin((m-1)\theta) & \cos((m-1)\theta) \end{pmatrix}$$

   montrons que $G_\theta^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta) & \sin(m\theta) \\ -\sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{pmatrix}$? Pour cela, on utilisera les deux propriétés trigonométriques suivante

   $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

   $$\begin{aligned} G_\theta^m &= G_\theta^{m-1} \times G_\theta^1 = \begin{pmatrix} \cos((m-1)\theta) & \sin((m-1)\theta) \\ -\sin((m-1)\theta) & \cos((m-1)\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos((m-1)\theta)\cos(\theta) - \sin((m-1)\theta)\sin(\theta) & \cos((m-1)\theta)\cos(\theta) + \sin((m-1)\theta)\sin(\theta) \\ -(\cos((m-1)\theta)\cos(\theta) + \sin((m-1)\theta)\sin(\theta)) & \cos((m-1)\theta)\cos(\theta) - \sin((m-1)\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   on pose $a = (m-1)\theta$ et $b = \theta$, alors

   $$\cos((m-1)\theta)\cos(\theta) - \sin((m-1)\theta)\sin(\theta) = \cos((m-1)\theta + \theta) = \cos(m\theta)$$

   $$\sin((m-1)\theta)\cos(\theta) + \cos((m-1)\theta)\sin(\theta) = \sin((m-1)\theta + \theta) = \sin(m\theta)$$

   d'où

   $$G_\theta^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta) & \sin(m\theta) \\ -\sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{pmatrix}$$
   - D'après la propriété de récurrence, pour tout $m \geq 1$ on a

   $$G_\theta^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta) & \sin(m\theta) \\ -\sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{pmatrix}$$

2. Montrons que pour toute $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice G_θ est inversible : en effet, une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or, on a

$$\det(G_\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

donc $\det(G_\theta)$ est indépendant de θ ; d'où la matrice G_θ est inversible et on a

$$G_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad (G_\theta^{-1})^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) \\ \sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{pmatrix} = (G_\theta^m)^{-1}.$$

□

Exercice 3

Soit A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice A est-elle inversible ?

Solution : Considérons la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant $\det(A)$ est différent de 0.

Alors, il suffit de calculer son déterminant : On peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.

Le développement suivant une ligne i :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne.

Le développement suivant une colonne j :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une colonne.

Avec $n = 3$, alors je vais opter pour le choix d'un développement selon la colonne numéro 1 car il figure un 0 sur cette colonne(le 0 permet de faciliter le calcul car on sait qu'une multiplication fois 0 est 0).

La colonne numéro 1 veut dire que $j = 1$ dans la formule

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}(-1)^{i+1} det(A_{i,1}) \\ &= a_{1,1}(-1)^{1+1} det(A_{1,1}) + a_{2,1}(-1)^{2+1} det(A_{2,1}) + a_{3,1}(-1)^{3+1} det(A_{3,1}) \\ &= a_{1,1} det(A_{1,1}) - a_{2,1} det(A_{2,1}) + a_{3,1} det(A_{3,1}) \end{aligned}$$

où $a_{11} = 1$, $a_{21} = 3$ et $a_{31} = 0$; donc

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-2+1) - 3 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

donc$\det(A) = -10 \neq 0$; d'où A est inversible et son inverse sera calculé par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}(A)} \text{Com}(A^T) = \frac{1}{\text{det}(A)} (\text{Com}(A))^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'abord les matrices qui vérifient $A^T = A$, on les appellent **Matrices symétriques** ; donc notre matrice A est symétrique, soit Com$(A^T) =$ Com(A).

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= +\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Gamma_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \\
\Gamma_{13} &= +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Gamma_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \\
\Gamma_{22} &= +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Gamma_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\
\Gamma_{31} &= +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Gamma_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\
\Gamma_{33} &= +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11
\end{aligned}$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Il faudra remarquer que l'inverse d'une matrice symétrique, lorsqu'elle est inversible, est symétrique. $\square$

Exercice 4

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Solution : Considérons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'abord la matrice B n'est pas symétrique car $B^T \neq B$ où $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.
Le développement suivant une ligne i :

$$det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} (-1)^{i+j} det(B_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(B_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $b_{i,j}$ et le terme $det(B_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $b_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne.
Le développement suivant une colonne j :

$$det(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} (-1)^{i+j} det(B_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j}det(B_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $b_{i,j}$ et le terme $det(B_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $b_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une colonne.
Avec $n=3$. Comme le nombre 0 figure dans la ligne $i=3$ et dans la colonne $j=j$, alors je peux utiliser l'une ou l'autre des deux formules. Je prend à utiliser la formule des lignes, soit la ligne $i=3$ dans la formule

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{j=1}^{3} b_{3,j}(-1)^{3+j}det(B_{3,j}) \\ &= b_{3,1}(-1)^{3+1}det(B_{3,1})+b_{3,2}(-1)^{3+2}det(B_{3,2})+b_{3,3}(-1)^{3+3}det(B_{3,3}) \\ &= b_{3,1}det(B_{3,1})-b_{3,2}det(B_{3,2})+b_{3,3}det(B_{3,3}) \end{aligned}$$

où $b_{31}=1$, $b_{32}=0$ et $b_{33}=1$; donc

$$\begin{aligned} \det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1-0+3 \end{aligned}$$

donc$\det(B)=4\neq 0$; d'où B est inversible et son inverse sera calculé par la formule

$$B^{-1}=\frac{1}{\text{det}(B)}\,\text{Com}(B^T)=\frac{1}{\text{det}(B)}\,(\text{Com}(B))^T$$

$$B^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors calculons les mineurs

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2; \quad \Gamma_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \\ \Gamma_{13} &= +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad \Gamma_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \\ \Gamma_{22} &= +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad \Gamma_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \\ \Gamma_{31} &= +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2; \quad \Gamma_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1 \\ \Gamma_{33} &= +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3 \end{aligned}$$

D'où

$$B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 5

Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & t & u \\ t & 1 & u \\ u & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall t,u\in\mathbb{R}$

1. Montrer que "$det(A)$" est un produit de facteurs du premier degré en t et u.

2. Trouver une relation entre t et u pour que la matrice A soit inversible.
3. résoudre et discuter selon les valeurs de t et u le système

$$\begin{cases} x + ty + uz = 0 \\ tx + y + uz = 0 \\ ux + ty + z = 0 \end{cases}$$

Indiquer le rang du système dans chacun des cas examinés.

Solution : Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & u \\ t & 1 & u \\ u & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall t, u \in \mathbb{R}.$$

1. Montrons que "$det(A)$" est un produit de facteurs du premier degré en t et u : en effet, il suffit de calculer le déterminant de A, on pourra utiliser n'importe laquelle des deux méthodes "ligne" ou "colonne". On calcule le déterminant, puis le factoriser en facteur de degré 1 :

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t & u \\ t & 1 & u \\ u & t & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & u \\ t & 1 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} t & u \\ u & 1 \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} t & 1 \\ u & t \end{vmatrix} \\ &= 1 - t\,u - t^2 + t\,u^2 + u\,t^2 - u^2 \\ &= (t\,u^2 - u^2) + (1 - t^2) + (u\,t^2 - tu) \\ &= u^2(t-1) - (t-1)(t+1) + t\,u(t-1) \\ &= (t-1)(u^2 - 1 - t + t\,u) \\ &= (t-1)((u-1)(u+1) + t(u-1)) \\ &= (t-1)(u-1)(u+t+1) \end{aligned}$$

d'où $\det(A) = (t-1)(u-1)(u+t+1)$ est un produit de facteurs $(t-1)$, $(u-1)$ et $(u+t+1)$ qui sont de degré 1 en t et en u.
2. La matrice A serait inversible si $\det(A) = (t-1)(u-1)(u+t+1) \neq 0$;
$(t-1)(u-1)(u+t+1) = 0$ est équivalent à $t = 1$ où bien $u = 1$ où bien $u + t + 1 = 0$,
d'où pour que A soit inversible, il faut que $t \neq 1$, $u \neq 1$ et $u + t + 1 \neq 0$.
3. Résovons le système suivant

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x + ty + uz = 0 \\ tx + y + uz = 0 \\ ux + ty + z = 0 \end{cases}$$

selon les valeurs de t et u.
Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & t & u \\ t & 1 & u \\ u & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = b$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur nul.

– Si $t \neq 1$, $u \neq 1$ et $u + t + 1 \neq 0$, alors la matrice A est inversible ; dans ce cas la solution est unique qui est le vecteur nul $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque le système $(\mathcal{S})$ est homogène (c'est à dire le second membre b est nul). Le rang du système cette fois-ci est $\mathrm{r} = 3$.

– Si $t = 1$ et $u \neq 1$, alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+uz=0 \\ x+y+uz=0 \\ ux+y+z=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x+y+uz=0 \\ z=-ux-y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y=-(u+1)x \\ z=x \end{array}\right.$$

donc l'ensemble de solutions est

$$E_1 = \{(x, -(u+1)x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Ker}(A)$$

E_1 est bien une droite vectorielle engendrée par $\{(1, -(u+1), 1)\}$ car tout élément $X \in E_1$ s'écrit

$$X = x(1, -(u+1), 1)$$

donc la famille $\{(1, -(u+1), 1)\}$ est une base de $E_1 = \mathrm{Ker}(A)$; soit $\dim(E_1) = 1$; d'où le rang du système $(\mathcal{S})$ est $\mathrm{r} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(E_1) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

– Si $t = 1$ et $u = 1$, alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z=0$$

donc l'ensemble de solutions est

$$E_2 = \{(x, y, z) \ / \ x+y+z=0\} = \mathrm{Ker}(A)$$

E_2 est bien un plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$. Pour tout élément $X \in E_2$ s'écrit

$$X = (x, y, -x-y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

donc la famille $\{(1, 0, -1); (0, 1, -1)\}$ engendre E_2 et elle est libre ; donc $\{(1, 0, -1); (0, 1, -1)\}$ est une base de $E_2 = \mathrm{Ker}(A)$; soit $\dim(E_2) = 2$; d'où le rang du système $(\mathcal{S})$ est

$$\mathrm{r} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(E_2) = 3 - 2 = 1 = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

– Si $t \neq 1$ et $u = 1$, alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{l} x+t\,y+z=0 \\ t\,x+y+z=0 \\ x+t\,y+z=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t\,x+y+z=0 \\ x+t\,y+z=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x \in \mathbb{R} \\ y=x \\ z=-(t+1)x \end{array}\right.$$

donc l'ensemble de solutions est

$$E_3 = \{(x, x, -(t+1)x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Ker}(A)$$

E_3 est bien une droite vectorielle engendrée par $\{(1, 1, -(t+1))\}$ car tout élément $X \in E_3$ s'écrit

$$X = x(1, 1, -(t+1))$$

donc la famille $\{(1, 1, -(t+1))\}$ est une base de $E_3 = \mathrm{Ker}(A)$; soit $\dim(E_3) = 1$; d'où le rang du système $(\mathcal{S})$ est $\mathrm{r} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(E_3) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

– Si $t \neq 1$, $u \neq 1$ et $t + u = -1$ soit $u = -t - 1$, alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{r} x+t\,y-(t+1)z=0 \\ t\,x+y-(t+1)z=0 \\ -(t+1)x+t\,y+z=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} (1-t)\,(x-y)=0 \\ z=-x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x \in \mathbb{R} \\ y=x \\ z=-x \end{array}\right.$$

donc l'ensemble de solutions est

$$E_4 = \{(x, x, -x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Ker}(A)$$

E_4 est bien une droite vectorielle engendrée par $\{(1, 1, -1)\}$ car tout élément $X \in E_4$ s'écrit

$$X = x(1, 1, -1)$$

donc la famille $\{(1, 1, -1)\}$ est une base de $E_4 = \mathrm{Ker}(A)$; soit $\dim(E_34) = 1$; d'où le rang du système $(\mathcal{S})$ est $\mathrm{r} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(E_4) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Remarque : Il faut réviser la partie parlant du rang d'une matrice, rang d'un endomorphisme et donc le rang d'un système linéaire est égal au rang de sa matrice, à savoir

$$\mathrm{r} = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

où E est l'espace vectoriel de dimension finie égale à la taille du système où de la matrice dy système.

$\square$

Exercice 6

1. Résoudre le système d'équations linéaires sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+ty+z &=& 3 \\ x-y+3z &=& 8 \\ x+2y-z &=& -3 \end{array}\right.$$

2. Le système suivant d'équations linéaires sur le corps $\mathbb{R}$ admet-il des solutions

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 3 \\ x-y+3z &=& 8 \\ x+2y-z &=& -3 \\ x+y+2z &=& -1 \end{array}\right.$$

Solution :

1. Résolvons le système d'équations linéaires sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

$$(\mathcal{S}) \ : \left\{\begin{array}{rcl} 2x+ty+z &=& 3 \\ x-y+3z &=& 8 \\ x+2y-z &=& -3 \end{array}\right.$$

En effet, le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système linéaire matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\,X = b$$

il s'agit bien d'un système linéaire à 3 équations et 3 inconnus, alors on dit que $(\mathcal{S})$ est un **système déterminé**. D'abord, le déterminant de la matrice A est

$$\det(A) = 4t - 7$$

donc A est inversible si et seulement si $t \neq \dfrac{7}{4}$.

On peut utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour le résoudre ; pour cela en effet la méthode d'élimination de Gauss consiste à triangulariser le système matriciel $A\,X = b$ qui se fait en des étapes

$1^{\text{ère}}$ **étape** :

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 1 & & 3 \\ 1 & -1 & 3 & | & 8 \\ 1 & 2 & -1 & & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{L}_1^{(0)} \\ \mathrm{L}_2^{(0)} \\ \mathrm{L}_3^{(0)} \end{array}$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** :

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 1 & & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,t - 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\,t + 2 & -\frac{3}{2} & & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{L}_1^{(1)} = \mathrm{L}_1^{(0)} \\ \mathrm{L}_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\mathrm{L}_1^{(0)} + \mathrm{L}_2^{(0)} \\ \mathrm{L}_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\mathrm{L}_1^{(0)} + \mathrm{L}_3^{(0)} \end{array}$$

$3^{\text{ème}}$ **étape** :

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & t & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,t-1 & \frac{5}{2} \quad | & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7-4\,t}{2+t} & \frac{17-11\,t}{2+t} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = \frac{4-t}{t+2}L_2^{(1)} + L_3^{(1)} \end{array}$$

donc résoudre le système $(\mathcal{S})$ est équivalent à résoudre le système suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,t-1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7-4\,t}{2+t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{17-11\,t}{2+t} \end{pmatrix}$$

donc il y a deux cas à discuter :

Premier cas : si $t \neq \dfrac{7}{4}$, alors la matrice A est inversible et donc le système $(\mathcal{S})$ admet une unique solution d'où la solution suivante

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \dfrac{5\,t-5}{4\,t-7} \\ y & = & \dfrac{3}{4\,t-7} \\ z & = & \dfrac{17-11\,t}{7-4\,t} \end{array}\right.$$

d'où l'ensemble de solutions E est

$$E = \left\{ \left(\frac{5\,t-5}{4\,t-7}; \frac{3}{4\,t-7}; \frac{11\,t-17}{4\,t-7} \right) \ / \ t \neq \frac{7}{4} \right\}.$$

Deuxième cas : si $t = \dfrac{7}{4}$, alors la matrice A n'est pas inversible et donc le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{15}{8} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{2} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} 2x + \frac{7}{4}\,y + z & = & 1 \\ -\frac{15}{8}\,y + \frac{5}{2}\,z & = & \frac{13}{2} \\ 0 & = & -\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

donc le système est impossible car $0 \neq -\frac{3}{5}$; d'où le sysème $(\mathcal{S})$ n'admet pas de solutions.

2. Le système suivant d'équations linéaires

$$(\mathcal{P}) \ : \ \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z & = & 3 \\ x-y+3z & = & 8 \\ x+2y-z & = & -3 \\ x+y+2z & = & -1 \end{array}\right.$$

est un **système sur-déterminé** car le nombre d'équations (4 équations) est supérieur au nombre d'inconnus (3 inconnus).

Procédons par l'absurde, supposons que le système $(\mathcal{S})$ a une solution, alors par substitution on a

$$(\mathcal{P}) \ : \ \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z & = & 3 \\ x-y+3z & = & 8 \\ x+2y-z & = & -3 \\ x+y+2z & = & -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3-2x-y & = & z \\ x-y+3(3-2x-y) & = & 8 \\ x+2y-(3-2x-y) & = & -3 \\ x+y+2(3-2x-y) & = & -1 \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent encore à

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3-2x-y & = & z \\ 5\,x+4\,y & = & 1 \\ y & = & -x \\ 3\,x+y & = & 7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3-2x-y & = & z \\ x & = & 1 \\ y & = & -x \\ 2\,x & = & 7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3-2x-y & = & z \\ x & = & 1 \\ y & = & -x \\ x & = & \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

donc $1=\frac{7}{2}$ soit $7=2$ qui est absurde ; d'où le système $(\mathcal{S})$ n'admet pas de solutions.

$\square$

Exercice 7
Sous quelle condition le système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{E})\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} y+az+a^2t & = & 1 \\ x+a^2z+at & = & -1 \\ ax+a^2y+t & = & 1 \\ a^2x+ay+z & = & 1 \end{array}\right.$$

admet-t-il une solution unique ? Résoudre, dans ce cas, le système.

Solution : Le système d'équations linéaires suivant

$$(\mathcal{E})\ :\ \left\{\begin{array}{rcr} y+az+a^2t & = & 1 \\ x+a^2z+at & = & -1 \\ ax+a^2y+t & = & 1 \\ a^2x+ay+z & = & 1 \end{array}\right.$$

est équivalent au système linéaire matriciel $A\,X=b$ suivant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & a^2 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & a^2 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le système $(\mathcal{E})$ admet une solution unique si A était inversible. Calculons le déterminant de A :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & a^2 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & 1 & 0 \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & 0 \end{vmatrix}-a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ a & a^2 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1-a^4-a^2-a^2+a^4-a^6-a^4-a^6+a^8 \end{aligned}$$

donc $\det(A)=a^8-2\,a^6-a^4-2\,a^2+1$; d'où le système $(\mathcal{E})$ admet une solution unique si $\det(A)=a^8-2\,a^6-a^4-2\,a^2+1\neq 0$.
Le terme $a^8-2\,a^6-a^4-2\,a^2+1$ se factorise sous la forme suivante

$$a^8-2\,a^6-a^4-2\,a^2+1=(a^4-(1-a)^2)(a^4-(1+a)^2)=(a^2-1+a)(a^2+1-a)(a^2-1-a)(a^2+1+a)$$

donc $\det(A)\neq 0$ si et seulement si $a^2\neq 1-a$ ou $a^2\neq -1+a$ ou $a^2\neq 1+a$ ou $a^2\neq -1-a$.
Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^2+a-1=0$ a pour solution

$$a_1=-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad a_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^2 - a + 1 = 0$ n'a pas de solutions ;
dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^2 - a - 1 = 0$ a pour solution

$$a_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

et dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^2 + a + 1 = 0$ n'a pas de solutions ; alors $\det(A) \neq 0$ si et seulement si

$$a \notin \left\{ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}$$

Dans ce cas, après un calcul de solutions (**je vous laisse faire les calculs ! ! ! !**), il vient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{1}{1-a+a^2} \\ y & = & \dfrac{1}{1-a+a^2} \\ z & = & -\dfrac{1}{1-a+a^2} \\ t & = & \dfrac{1}{1-a+a^2} \end{array} \right.$$

$\square$